# 《goods》解题报告

湖南省长沙市第一中学　李铭乐洋

October 2023

## 1　简要题意

给出 $n$ 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_i$ 满足 $0 \le a_i < 2^m$。

给定整数 $B$，对于 $S \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ 定义 $f(S) = [z^B](1 + 2z + z^2)^{|S|}$ 。

再定义 $g(S)$ 为所有 $i \in S$ 的 $a_i$ 的异或和。你需要对于每个 $0 \le i < 2^m$ 求出 $\sum_{S \subseteq \{1,2,\cdots,n\}} [g(S) = i] f(S)$ 对 998244353 取模后的结果。

## 2　数据范围

本题共 25 个测试点，每个测试点等分（即每个测试点 4 分）。

| 测试点编号 | $n \le$ | $m \le$ | 特殊性质 |
|---|---|---|---|
| $1 \sim 2$ | 20 | 20 | 无。 |
| $3 \sim 5$ | 300 | 10 | 无。 |
| $6 \sim 11$ | 3000 | 20 | 无。 |
| $12 \sim 13$ | $10^6$ | 20 | 保证 $B = 0$ 。 |
| $14 \sim 17$ | $10^6$ | 11 | 无。 |
| $18 \sim 25$ | $10^6$ | 20 | 无。 |

对于所有数据，满足：$1 \le n \le 10^6, 1 \le m \le 20, 0 \le B \le n$ 。

## 3　解题过程

### 3.1　算法 1

枚举所有 $S \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$，然后计算 $f(S), g(S)$ 后统计答案。同时由于 $f(S)$ 取值仅和 $|S|$ 有关，通过预处理 $f(S)$ 做到更优的复杂度。

该算法时间复杂度为 $O(2^n n)$。期望通过测试点 $1 \sim 2$ 。

### 3.2　算法 2

同样预处理 $f(S)$ 后，设计动态规划：令 $dp(i, j, k)$ 表示考虑了所有 $1 \le t \le i$ 的 $a_t$，选择了 $j$ 个 $a_x$（即 $|S \cap \{1, 2, \cdots, i\}| = j$），这些被选择的 $a_x$ 的异或和为 $k$ 。转移只需要考虑 $i \in S$ 和 $i \notin S$ 两种情况即可。

该算法时间复杂度为 $O(n^2 2^m)$。结合算法 1，期望通过测试点 $1 \sim 5$ 。

### 3.3 算法 3

$B=0$ 时，问题相当于：求在 $a_i$ 中选若干个数异或和为 $v$ 的方案数，对每个 $0 \le v < 2^m$ 给出结果。

可以用线性基解决。假设线性基中有 $cnt$ 个数，则可以被表示的数答案为 $2^{n-cnt}$；不能被表示的数答案为 $0$ 。

该算法时间复杂度为 $O(mn+2^m)$ 。结合算法 1,2，期望通过测试点 $1 \sim 5$ 以及 $12 \sim 13$。

### 3.4 算法 4

为了方便记 $G(z)=1+2z+z^2$ 。

令 $f_i(x,y)=1+xy^{a_i}$ 。其中 $x$ 一维进行加法卷积，$y$ 一维进行异或卷积。令 $F(x,y)=\prod_{1\le i\le n} f_i(x,y)$，通过异或 FWT 描述 $F(x,y)$，即有：

$$\mathrm{FWT}(f_i(x,y)) = \sum_{0\le j<2^m} y^j(1+(-1)^{\mathrm{popcount}(j\wedge a_i)}x)$$
$$\mathrm{FWT}(F(x,y)) = \sum_{0\le j<2^m} y^j \prod_{1\le i\le n}(1+(-1)^{\mathrm{popcount}(j\wedge a_i)}x)$$

我们注意到，每个 $[y^j]\mathrm{FWT}(F(x,y))$ 都能被表示为 $(1+x)^{t_j}(1-x)^{n-t_j}$ 。而求 $t_j$ 可以带入 $x=1$ 对 $\sum f_i(x,y)$ 做 FWT，这样 $[y^j]\mathrm{FWT}(\sum f_i(x,y))$ 应该等于 $2t_j$ 。

我们要的答案其实是 $[z^B]F(G(z),y)$ 。只要考虑求出 $[z^B]\mathrm{FWT}(F(G(z),y))$，再 IFWT 回来即可。于是：

$$\begin{aligned}
[z^B]\mathrm{FWT}(F(G(z),y)) &= \sum_{0\le j<2^m} y^j[z^B](1+G(z))^{t_j}(1-G(z))^{n-t_j}\\
&= \sum_{0\le j<2^m} y^j[z^B](2+2z+z^2)^{t_j}(-2z-z^2)^{n-t_j}\\
&= \sum_{0\le j<2^m} y^j(-1)^{n-t_j}[z^{B-n+t_j}](2+2z+z^2)^{t_j}(2+z)^{n-t_j}\\
&= \sum_{0\le j<2^m} y^j(-1)^{n-t_j}\sum_{k=0}^{t_j}\binom{t_j}{k}2^{t_j-k}[z^{B-n+t_j-k}](2+z)^{n-t_j+k}\\
&= \sum_{0\le j<2^m} y^j(-1)^{n-t_j}\sum_{k=0}^{t_j}\binom{t_j}{k}\binom{n-t_j+k}{B-n+t_j-k}2^{k+2n-t_j-B}\\
&= 2^{2n-B}\sum_{0\le j<2^m} y^j(-1)^{n-t_j}\sum_{k=0}^{t_j}\binom{t_j}{k}\binom{n-t_j+k}{B-n+t_j-k}2^{k-t_j}
\end{aligned}$$

我们只需要求出 $h(t)=\sum\limits_{k=0}^{t}\binom{t}{k}\binom{n-t+k}{B-n+t-k}2^{k-t}$ 。这个式子可以用 NTT 求出，因为里面的项要关注的要么只有 $k$ 要么只有 $t-k$ 。

该算法时间复杂度 $O(m2^m+n\log n)$ 。

## 参考文献


[1] UOJ 310 黎明前的巧克力